

VŠB – Technická univerzita Ostrava  
Fakulta elektrotechniky a informatiky  
Katedra aplikované matematiky

# **Věty o pevných bodech**

## **Fixed Points Theorems**



## Zadání bakalářské práce

Student:

**Jan Vícha**

Studijní program:

B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor:

1103R031 Výpočetní matematika

Téma:

Věty o pevných bodech

Fixed Points Theorems

Jazyk vypracování:

čeština

Zásady pro vypracování:

V bakalářské práci se budeme zabývat různými typy vět o pevných bodech. Připomeňme, že bod  $x$  se nazývá pevný bod zobrazení  $T$ , pokud se tento bod zobrazí sám na sebe, tj.  $T(x)=x$ . Existence pevného bodu je v matematice velmi důležitou vlastností. Mnoho zajímavých otázek lze totiž převést na existenci pevného bodu jistého zobrazení (řešitelnost diferenciálních rovnic, věta o implicitních funkcích, řešení algebraických rovnic apod.).

Předpokládá se, že některé tyto aplikace se v bakalářské práci také objeví.

Seznam doporučené odborné literatury:

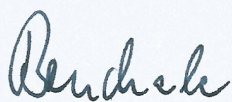
Podle pokynů vedoucího práce

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

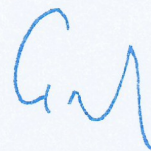
Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Petr Vodstrčil, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2015

Datum odevzdání: 28.04.2017



doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.  
vedoucí katedry



prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.  
děkan fakulty





Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 24. dubna 2017

.....Jan Vioha.....



Rád bych na tomto místě poděkoval vedoucímu bakalářské práce Mgr. Petru Vodstrčilovi, Ph.D. za odbornou výpomoc, protože bez něj by tato práce nevznikla. Dále bych chtěl poděkovat své rodině, která mě po celou dobu studia podporovala.





## Abstrakt

V této práci si nejprve řekneme, co je to pevný bod, a následně se podíváme na pevné body zobrazení  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Poté si nadefinujeme metrické prostory a pojmy potřebné k formulaci a důkazu Banachovy věty o pevném bodě. Následně si ukážeme některé aplikace Banachovy věty (numerický výpočet odmocniny, řešení soustav rovnic, věta o implicitní funkci, věta o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy), kde nám samotná Banachova věta o pevném bodě nabídne i metodu k nalezení řešení, což si ukážeme na příkladech.

**Klíčová slova:** pevný bod, metrický prostor, Banachova věta o pevném bodě, obyčejné diferenciální rovnice, soustava rovnic, implicitní funkce, numerický výpočet odmocniny

## Abstract

In this bachelor thesis we first take a look at fixed points and then fixed points of function  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . After that we define metric space and concepts needed to formulation and proof of Banach fixed-point theorem. Then we show some applications of Banach fixed-point theorem (numerical calculation of the square root, solving systems of equations, implicit function theorem, theorem on the existence and uniqueness of solutions of the Cauchy problem), where Banach fixed-point theorem will give us method to find solution which we will show in the examples.

**Key Words:** fixed point, metric space, Banach fixed-point theorem, ordinary differential equation, system of equations, implicit function



# Obsah

Seznam použitých zkratek a symbolů	13
Seznam obrázků	15
1 Úvod	17
2 Pevný bod	19
3 Pevný bod zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$	21
4 Metrické prostory	31
5 Banachova věta	33
6 Aplikace Banachovy věty	35
7 Závěr	57
Literatura	59



## Seznam použitých zkratek a symbolů

$C(\langle a, b \rangle)$	– prostor spojitých funkcí na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ ( $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ )
$\mathbb{C}$	– obor komplexních čísel
$\mathbb{C}^n$	– komplexní vektory dimenze $n$
$\mathbb{C}^{n,n}$	– komplexní matice $n \times n$
$E$	– jednotková matice
$\mathbb{R}$	– obor reálných čísel
$\mathbb{R}^n$	– reálné vektory dimenze $n$
$\mathbb{R}^{n,n}$	– reálné matice dimenze $n \times n$
$\bar{a}$	– komplexně sdružené číslo
$\langle a, b \rangle$	– uzavřený interval
$(a, b)$	– otevřený interval
$\langle a, b \rangle, (a, b)$	– polouzavřený interval
$\frac{\partial f}{\partial y}$	– parciální derivace funkce $f$ podle proměnné $y$
$\sigma(A)$	– spektrum matice $A$
$ \cdot $	– absolutní hodnota
$\ \cdot\ $	– euklidovská norma





## Seznam obrázků

1	Pevné body . . . . .	21
2	Pevný bod na uzavřeném intervalu . . . . .	22
3	Graf funkce $f$ . . . . .	23
4	Graf funkce $g$ . . . . .	24
5	Graf funkce $h$ . . . . .	25
6	Geometrický význam podmínky (2). . . . .	28
7	Graf funkce $f$ . . . . .	30
8	Odhad spektra matice $A$ . . . . .	44
9	Výsledky iterace pro odhadnuté vlastní číslo. . . . .	45
10	Iterace pro přesné největší vlastní číslo. . . . .	46
11	$x^2 - y^2 = 0$ . . . . .	47
12	Množina $M$ s vyznačeným bodem $(4, 2)$ . . . . .	51
13	Ukázka vypočítaných iterací. . . . .	52
14	Množina $M$ , bod $(4, 2)$ a jeho okolí a graf funkce $y_3$ . . . . .	53



# 1 Úvod

V této práci se budeme zabývat existencí pevného bodu a jeho využitím.

Nejdříve si řekneme, co je to pevný bod a ukážeme si nějaké příklady. Následně se budeme zabývat pevnými body funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Naformulujeme a dokážeme větu, která nám zaručí existenci a jednoznačnost pevného bodu. Dále se budeme zabývat pevnými body v metrických prostorech, kde si nejprve řekneme, co jsou to metrické prostory a nadefinujeme pojmy potřebné k formulaci a důkazu Banachovy věty o pevném bodě.

Poté si ukážeme některé aplikace Banachovy věty. Začneme numerickým výpočtem odmocniny, kterou poté porovnáme s Newtonovou metodou. Pak se podíváme na řešení soustavy  $n$  rovnic o  $n$  neznámých. Dále si řekneme něco o implicitních funkcích a dokážeme větu o implicitní funkci. A nakonec se podíváme na obyčejné diferenciální rovnice a dokážeme si větu o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy.



## 2 Pevný bod

**Definice 1** (*Definice pevného bodu*) Necht  $M$  je neprázdná množina a  $T : M \rightarrow M$  je zobrazení. Prvek  $x \in M$  nazveme pevným bodem zobrazení  $T$ , pokud  $T(x) = x$ .

**Příklad 1** Najděte všechny pevné body funkce  $f(x) = x^2 - 4x + 6$ .

Hledáme-li pevné body funkce  $f$ , musíme vyřešit rovnici  $x = f(x)$ , tj.

$$x = x^2 - 4x + 6,$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Dostali jsme kvadratickou rovnici, kterou lze dopočítat jednoduše

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3.$$

Pro ověření, zdali jsou to pevné body, dosadíme do původní funkce

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 6 = 2,$$

$$f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 6 = 3.$$

**Příklad 2** Necht  $M$  je množina všech posloupností. Najděte všechny pevné body zobrazení  $T : M \rightarrow M$ , kde obraz  $T(x)$  vznikne odebráním prvního členu z posloupnosti  $x \in M$ .

$$\underbrace{(x_1, x_2, x_3, \dots)}_x \mapsto \underbrace{(x_2, x_3, x_4, \dots)}_{T(x)}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ x &= T(x) \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_2 = x_3 \\ x_3 = x_4 \\ \vdots \end{array} \Leftrightarrow \text{posloupnost je konstantní.} \end{aligned}$$

Pevným bodem zobrazení  $T$  je jakákoliv konstantní posloupnost.

**Příklad 3** Necht  $N = C(\langle 0, 1 \rangle)$ . Najděte všechny pevné body zobrazení  $F : N \rightarrow N$ , kde  $F(g)(x) = 1 + \int_0^x g(t) dt$ .

Uvědomme si, že pro  $g \in N$  platí

$$\begin{aligned}
& F(g) = g \\
& \Downarrow \\
& (\forall x \in \langle 0, 1 \rangle) : F(g)(x) = g(x) \\
& \Downarrow \\
& (\forall x \in \langle 0, 1 \rangle) : 1 + \int_0^x g(t)dt = g(x) \\
& \Downarrow \\
& (\forall x \in (0, 1)) : g(x) = g'(x) \wedge g(0) = 1.
\end{aligned} \tag{1}$$

Pevným bodem bude tedy funkce  $g(x) = e^x$ , protože splňuje námi vypočtenou podmínku (1)

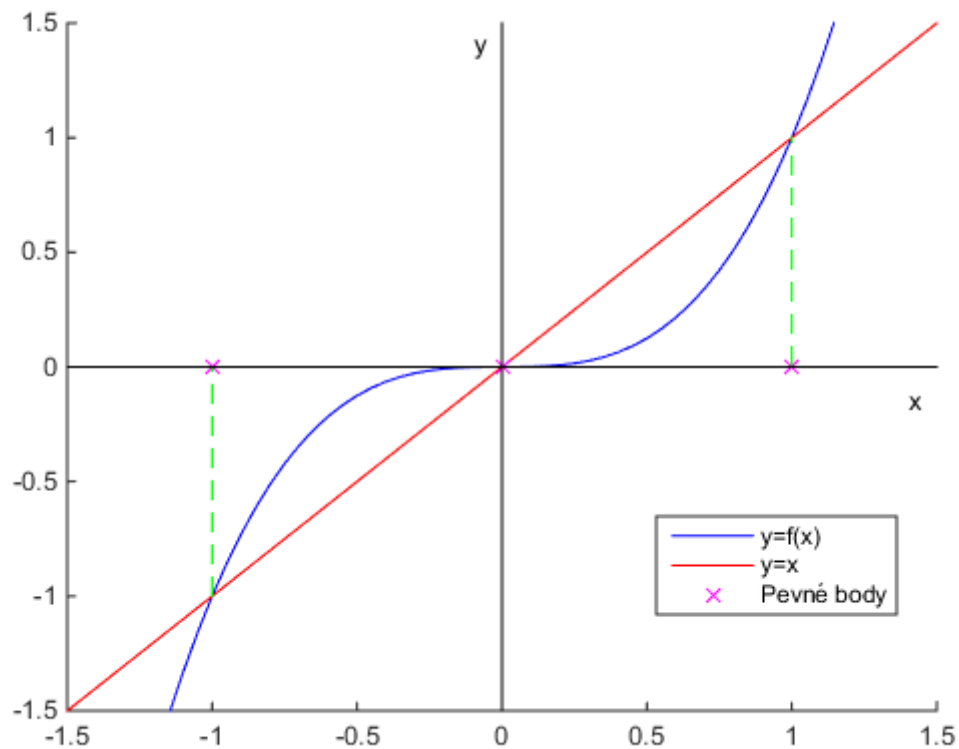
$$g(x) = e^x = g'(x) \wedge g(0) = e^0 = 1.$$

Žádný další pevný bod není, protože Cauchyova úloha  $g' = g$ ,  $g(0) = 1$  má pouze jedno řešení  $g(x) = e^x$ .



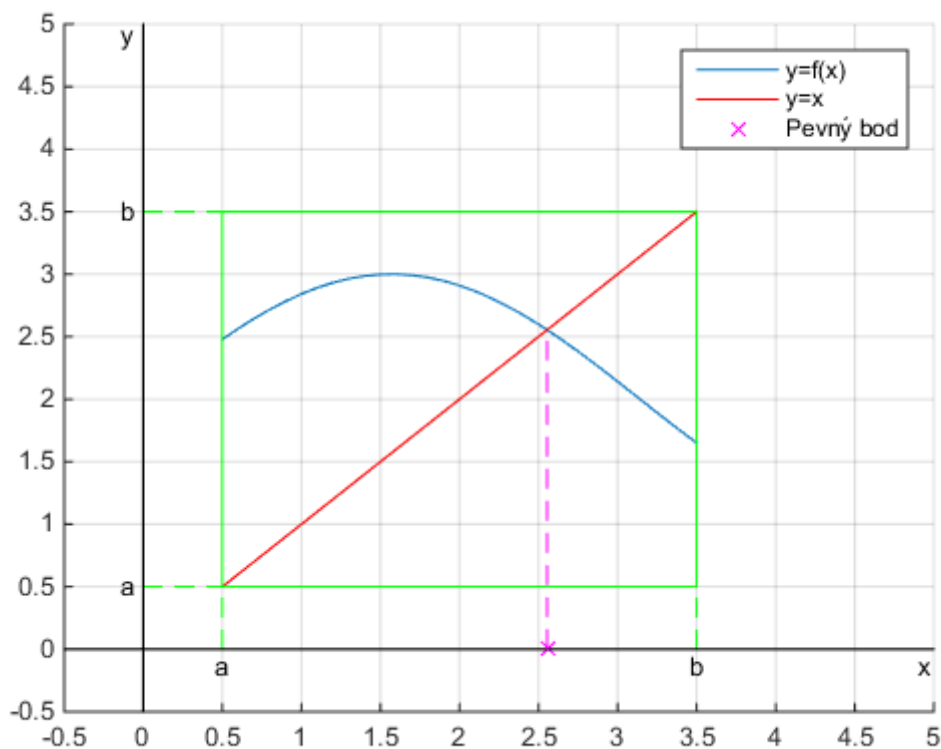
### 3 Pevný bod zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$

Mějme funkci  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Pevné body funkce  $f$  si lze graficky představit jako  $x$ -ové souřadnice průsečíků grafu funkce  $y = f(x)$  a  $y = x$ .



Obrázek 1: Pevné body

**Věta 1** Mějme funkci  $f$ , která je definovaná na intervalu  $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ , kde  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Tento interval zobrazí do sebe, tj. pro všechna  $x \in \langle a, b \rangle$  platí  $f(x) \in \langle a, b \rangle$ , a navíc je funkce  $f$  v tomto intervalu spojitá. Pak má funkce  $f$  v tomto intervalu alespoň jeden pevný bod.



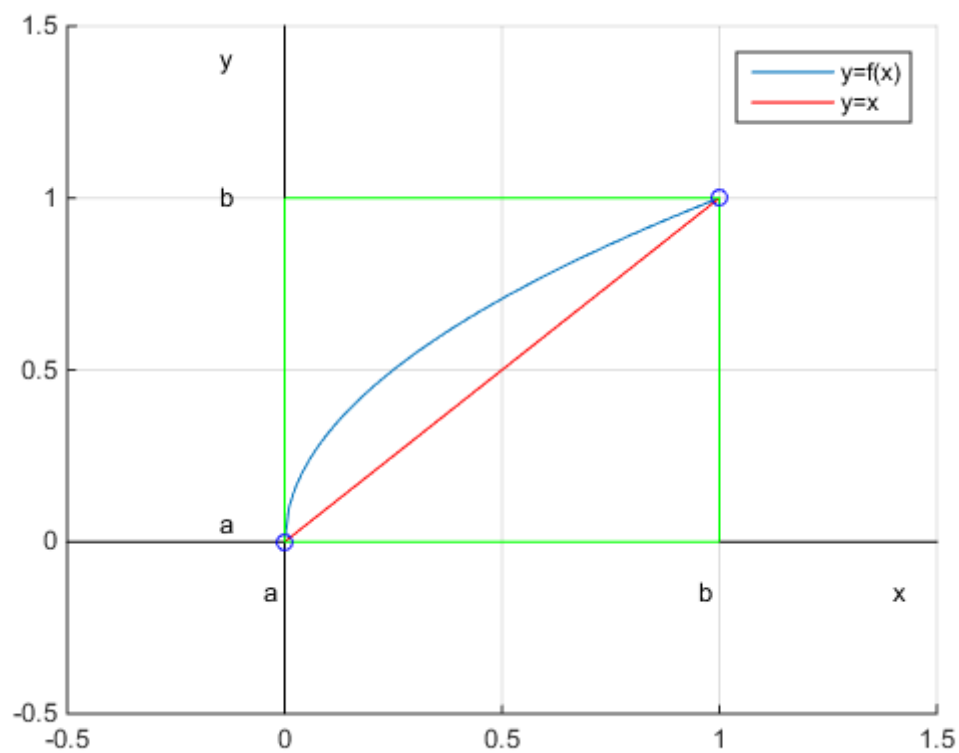
Obrázek 2: Pevný bod na uzavřeném intervalu

**Důkaz** Položíme  $g(x) = x - f(x)$ . Lze předpokládat, že  $g(a) \neq 0$  a  $g(b) \neq 0$ . (Kdyby platilo  $g(a) = 0$ , znamenalo by to, že  $a$  je pevný bod funkce  $f$ . Pokud by  $g(b) = 0$ , pak by  $b$  bylo pevným bodem.) Potom platí  $g(a) = a - f(a) < 0$  a  $g(b) = b - f(b) > 0$ . Protože je  $g$  spojitá, má  $g$  v intervalu  $(a, b)$  kořen  $x_0$ , který je zároveň pevným bodem  $f$ . [2]

■

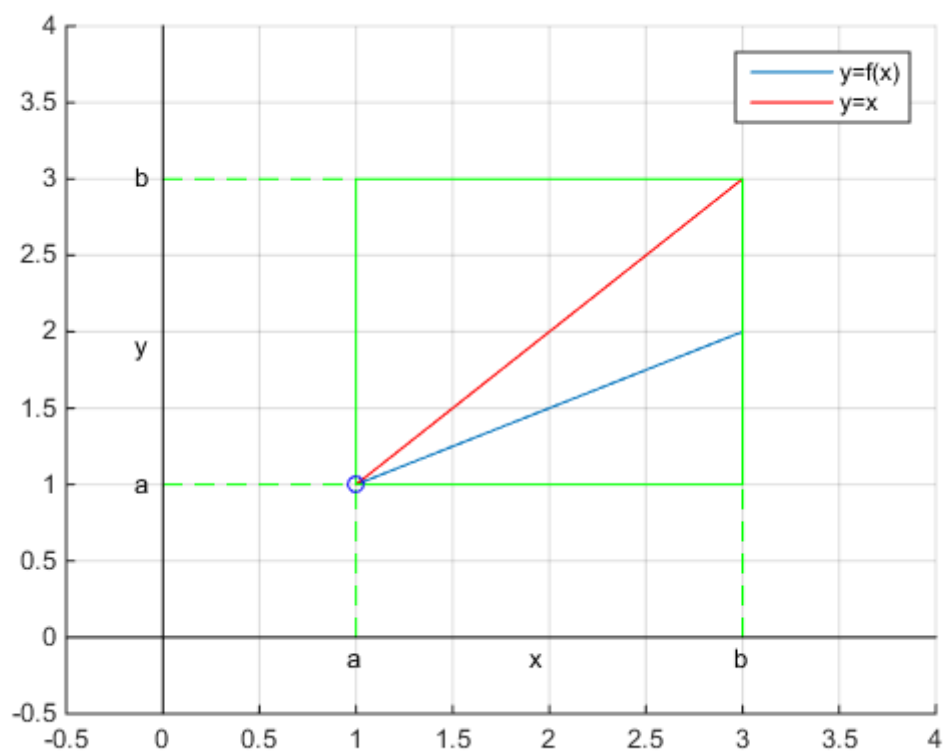
Předpoklad uzavřenosti a omezenosti intervalu  $\langle a, b \rangle$  je důležitý a nelze ho vypustit. To je ukázáno v následujících příkladech.

Jako příklad si můžeme vzít zobrazení  $f(x) = \sqrt{x}$  definované na intervalu  $(0, 1)$ . Zobrazení  $f$  nemá v  $(0, 1)$  pevný bod, a přitom je spojitě na  $(0, 1)$  a zobrazuje  $(0, 1)$  do sebe.



Obrázek 3: Graf funkce  $f$

Nebo například zobrazení  $g : (1, 3) \rightarrow (1, 3)$ , kde  $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ . Jak lze vidět v následujícím grafu, tak ani funkce  $g$  nemá pevný bod v  $(1, 3)$ , a přitom je na daném intervalu spojitá a zobrazuje  $(1, 3)$  do sebe.

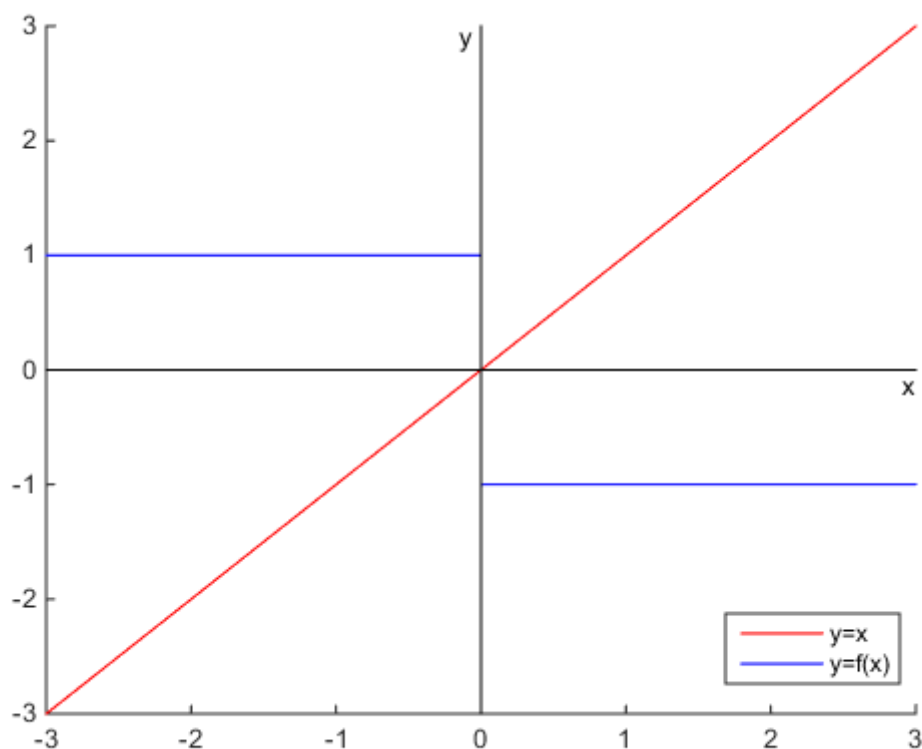


Obrázek 4: Graf funkce  $g$

Předpoklad spojitosti je také podstatný, jak můžeme vidět na funkci  $h : \langle -3, 3 \rangle \rightarrow \langle -3, 3 \rangle$  s předpisem

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle -3, 0 \rangle \\ -1, & x \in (0, 3) \end{cases}.$$

Lze jednoduše vidět v následujícím grafu, že funkce  $h$  nemá pevný bod.



Obrázek 5: Graf funkce  $h$

Předpoklad omezenosti intervalu také nemůžeme vypustit. Nejjednodušší příklad je zobrazení  $f(x) = x + 1$ , kde jde jednoduše vidět, že zobrazení nemá žádný pevný bod, přitom je spojitě a zobrazuje  $\mathbb{R}$  do sebe.

Pokud chceme zajistit, aby existoval pevný bod funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , musíme omezit růst zobrazení  $f$  a to tak, aby nerostla více než zobrazení  $y = x$ . Přesněji, platí následující věta.

**Věta 2** *Nechť  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a nechť platí*

$$(\exists q < 1) (\forall x, y \in \mathbb{R}) : |f(x) - f(y)| \leq q \cdot |x - y|. \quad (2)$$

*Pak  $f$  má na  $\mathbb{R}$  právě jeden pevný bod.*

**Poznámka 1** Vztah (2) nám rovněž zaručuje spojitost  $f$ .

Skutečně, máme-li libovolné  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $(x_n) \subset \mathbb{R}$ ,  $x_n \rightarrow x_0$ , a funkci  $f$  splňující (2), pak platí

$$\begin{array}{ccc} 0 & \leq & |f(x_n) - f(x_0)| \leq \underbrace{q|x_n - x_0|}_{\downarrow 0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| \rightarrow 0, \text{ tzn. } f(x_n) \rightarrow f(x_0).$$

To znamená, že  $f$  je spojitá v  $x_0$ .

**Důkaz (Věty 2)** Mějme funkci  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , která splňuje předpoklad věty 2.

Položíme  $g(x) = f(x) - x$ . Nechť  $x_0 \in \mathbb{R}$  je libovolné a dále neměnné. Předpoklad věty 2 nám dává existenci čísla  $q < 1$  takového, že

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : |f(x) - f(x_0)| \leq q|x - x_0|. \quad (3)$$

Nejprve budeme předpokládat, že  $x > x_0$ . Tím se v nerovnosti (3) zbavíme jedné absolutní hodnoty a dostaneme

$$(\forall x > x_0) : |f(x) - f(x_0)| \leq q(x - x_0).$$

Pro absolutní hodnotu čísla  $a \in \mathbb{R}$  platí, že  $a \leq |a|$ , proto z poslední nerovnosti plyne

$$(\forall x > x_0) : (f(x) - f(x_0)) \leq q(x - x_0),$$

$$f(x) \leq f(x_0) + q(x - x_0).$$

Nyní odečteme od obou stran poslední nerovnosti  $x$ , abychom získali na levé straně funkci  $g$ . To znamená, že

$$\begin{aligned} (\forall x > x_0) : \underbrace{f(x) - x}_{g(x)} &\leq f(x_0) + q(x - x_0) - x, \\ g(x) &\leq f(x_0) + qx - qx_0 - x, \\ g(x) &\leq \underbrace{f(x_0) - qx_0}_{\text{konst.}} - \underbrace{x(1 - q)}_{>0}. \end{aligned}$$

Pokud se  $x \rightarrow +\infty$ , potom se pravá strana poslední nerovnosti blíží k  $-\infty$ , tak levá strana díky dané nerovnosti se také blíží k  $-\infty$ . To znamená

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

Nyní budeme předpokládat, že  $x < x_0$ , pak platí (z nerovnosti (3))

$$(\forall x < x_0) : |f(x) - f(x_0)| \leq -q(x - x_0).$$



Protože pro absolutní hodnotu čísla  $a \in \mathbb{R}$  platí také nerovnost  $-a \leq |a|$ , tak můžeme nahradit absolutní hodnotu a následně nerovnost upravit

$$(\forall x < x_0) : -(f(x) - f(x_0)) \leq -q(x - x_0) \quad / \cdot (-1),$$

$$(f(x) - f(x_0)) \geq q(x - x_0),$$

$$f(x) \geq f(x_0) + q(x - x_0).$$

Nyní opět odečteme  $x$ , abychom získali na levé straně funkci  $g$

$$(\forall x < x_0) : \underbrace{f(x) - x}_{g(x)} \geq f(x_0) + q(x - x_0) - x,$$

$$g(x) \geq f(x_0) + qx - qx_0 - x,$$

$$g(x) \geq \underbrace{f(x_0) - qx_0}_{konst.} - x \underbrace{(1 - q)}_{>0}.$$

Pokud se  $x \rightarrow -\infty$ , potom se bude pravá strana poslední nerovnosti blížit k  $+\infty$ , a díky nerovnosti se bude blížit k  $+\infty$  i levá strana, to znamená

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty.$$

Protože

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) > 0 \text{ a } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) < 0$$

a funkce  $g$  je navíc spojitá (poznámka 1), tak existuje takové  $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ , pro které platí  $g(\tilde{x}) = 0$ . Bod  $\tilde{x}$  je zároveň pevným bodem funkce  $f$ . [2]

Právě jsme dokázali, že zobrazení  $f$  splňující předpoklad věty 2 má alespoň jeden pevný bod. Ukážeme, že pevný bod je právě jeden.

Předpokládejme, že  $x_1$  a  $x_2$  jsou pevné body zobrazení  $f$ . To znamená, že  $f(x_1) = x_1$  a  $f(x_2) = x_2$ . Odtud a z podmínky (2) plyne

$$|x_1 - x_2| = |f(x_1) - f(x_2)| \leq q \cdot |x_1 - x_2| \Rightarrow$$

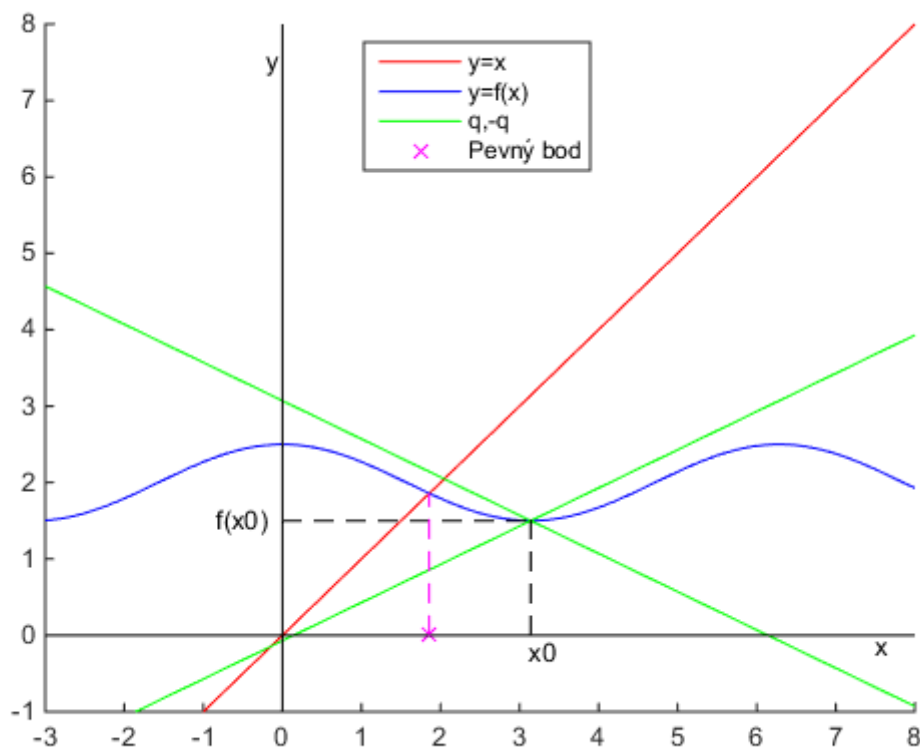
$$|x_1 - x_2| \leq q \cdot |x_1 - x_2| \Rightarrow$$

$$|x_1 - x_2| \cdot (1 - q) \leq 0, \text{ kde } 1 - q > 0 \Rightarrow$$

$$|x_1 - x_2| \leq 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

■

**Poznámka 2** Geometrický význam podmínky (2) si můžeme představit tak, že si zvolíme libovolný bod  $x_0$ . Poté vyneseme přímky se směrnici  $q$  a  $-q$ , které procházejí bodem  $(x_0, f(x_0))$ . Graf funkce  $f$  se pak nachází v pravé a levé části mezi těmito přímkami od bodu  $(x_0, f(x_0))$ . Vzhledem k tomu, že tyto přímky mají menší růst než funkce  $y = x$ , tak se grafy těchto přímek protnou s grafem  $y = x$ . Protože se graf funkce  $f$  nachází mezi přímkami, tak se protne s grafem  $y = x$  také, jak lze vidět v následujícím obrázku.



Obrázek 6: Geometrický význam podmínky (2).

Pokud má funkce  $f$  všude v  $\mathbb{R}$  derivaci, tak nám z věty 2 vyplyne tato zjednodušená věta.

**Věta 3** *Nechť  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a nechť platí*

$$(\exists q < 1) (\forall x \in \mathbb{R}) : |f'(x)| \leq q. \quad (4)$$

*Pak  $f$  má právě jeden pevný bod.*

**Důkaz** Nechť  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  jsou libovolné. Pak pro jisté  $\xi \in \mathbb{R}$  podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě (viz. [6]) platí

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi) \cdot (x_1 - x_2)$$

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ |f(x_1) - f(x_2)| &= \underbrace{|f'(\xi)|}_{\leq q \text{ (z předpokladu (4))}} \cdot |x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

Zbytek pak plyne z věty 2. ■

Mohli bychom si pomyslet, že předpoklady věty 2 by šly ještě více zjednodušit a to tak, že by  $q$  mohlo být rovno 1 a neostrou nerovnost bychom nahradili ostrou nerovností. Celková podmínka by se změnila takto:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y) : |f(x) - f(y)| < |x - y|. \quad (5)$$

Tato (slabší) podmínka však nestačí, jak lze vidět například u zobrazení

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ x + e^{-x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Funkce  $f$  je diferencovatelná na  $\mathbb{R}$ , tj. existuje derivace

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Snadno se přesvědčíme, že

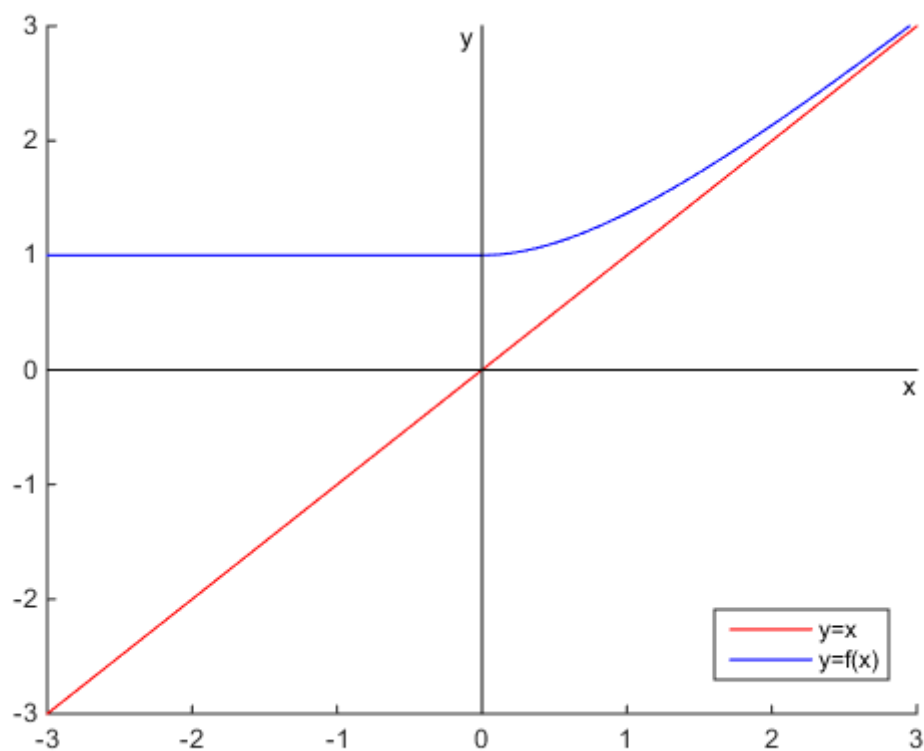
$$(\forall x \in \mathbb{R}) : |f'(x)| < 1. \quad (6)$$

Pak z Lagrangeovy věty plyne

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y) : |f(x) - f(y)| = \underbrace{|f'(\xi)|}_{< 1} \cdot |x - y| < |x - y|.$$

Jak lze vidět, tak funkce  $f$  splňuje vztah (5), a přesto nemá pevný bod, protože

$$\begin{aligned} e^{-x} \neq 0 &\Rightarrow x + e^{-x} \neq x, & x > 0, \\ 1 \neq x, & & x \leq 0. \end{aligned}$$



Obrázek 7: Graf funkce  $f$

Zatím jsme se zabývali zobrazením typu  $f : M \rightarrow M$ , kde  $M \subset \mathbb{R}$ . Díky tomu jsme si udělali pěknou představu o pevných bodech, ale nestačilo by to dále. Proto se v následující kapitole budeme zabývat pevnými body v obecných metrických prostorech.

## 4 Metrické prostory

Než se dopracujeme k pevným bodům v metrických prostorech, tak si zavedeme několik definic týkajících se metrických prostorů. Poté uvedeme tzv. Banachovu větu o pevném bodě.

**Definice 2** *Metrickým prostorem nazýváme každou neprázdnou množinu  $M$ , na níž je definováno zobrazení (tzv. metrika)*

$$\varrho : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

*splňující podmínky:*

1.  $\forall x, y \in M : \varrho(x, y) \geq 0, \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  - *nezápornost*
2.  $\forall x, y \in M : \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$  - *symetrie*
3.  $\forall x, y, z \in M : \varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \varrho(x, z)$  - *trojúhelníková nerovnost [1]*

Množinu  $M$  spolu s metrikou  $\varrho$  nazýváme metrickým prostorem, který označujeme  $(M, \varrho)$ . Prvky množiny  $M$  jsou body metrického prostoru  $(M, \varrho)$  a číslo  $\varrho(x, y)$ , kde  $x, y \in M$ , je pak vzdáleností bodů  $x$  a  $y$ . [1]

**Definice 3** *Buď  $(x_n)$  posloupnost v metrickém prostoru  $M$  a buď  $x \in M$ . Řekneme, že posloupnost  $(x_n)$  má limitu  $x$  a píšeme  $x_n \rightarrow x$ , platí li*

$$\varrho(x_n, x) \rightarrow 0.$$

*Posloupnost  $(x_n)$  se pak nazývá konvergentní posloupnost. [1]*

**Věta 4 (Nutná podmínka konvergence).** *Nechť  $(x_n)$  je konvergentní posloupnost v metrickém prostoru  $M$  (tzn. že existuje  $x \in M$ , pro které  $x_n \rightarrow x$ ). Potom platí tzv. Bolzano-Cauchyho podmínka: [1]*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N}; n, m \geq n_0) : \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

**Definice 4** *Posloupnost  $(x_n)$  (v metrickém prostoru  $M$ ), pro níž platí Bolzano-Cauchyho podmínka, se nazývá cauchyovská. [1]*

Věta 4 vlastně říká, že každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. Opačná implikace obecně neplatí.

**Definice 5** *Metrický prostor  $M$  se nazývá úplným, je-li v něm každá cauchyovská posloupnost konvergentní. [1]*

Jako příklad úplného metrického prostoru si můžeme vzít prostor reálných čísel  $\mathbb{R}$  s euklidovskou metrikou

$$\varrho(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Samozřejmě platí, že i prostor  $\mathbb{R}^n$  s euklidovskou metrikou

$$\varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \|x - y\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n \quad (7)$$

je úplný metrický prostor. Na pravé straně (7) se vyskytuje tzv. euklidovská norma, která je definovaná

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Nebo metrické prostory s diskrétní metrikou, která je definovaná

$$\varrho(x, x) = 0 \text{ a } \varrho(x, y) = 1 \text{ pro } x \neq y,$$

protože v této metrice jsou cauchyovské pouze posloupnosti, které jsou od jistého indexu konstantní, a tedy jsou konvergentní. Jako příklad neúplného metrického prostoru můžeme vzít prostor racionálních čísel, kde posloupnost racionálních čísel  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 2,7$ ,  $a_3 = 2,71$ ,  $a_4 = 2,718$  a dále dle desetinného rozvoje Eulerova čísla  $e$ , která je cauchyovská, ale její limitou je Eulerovo číslo, což je iracionální číslo. Posloupnost tedy není konvergentní v daném prostoru. Další příklad neúplného metrického prostoru můžeme vzít interval  $(0, +\infty)$  s metrikou  $\varrho(x, y) = |x - y|$ , kde posloupnost

$$a_n = \frac{1}{n}$$

je cauchyovská, ale nemá v  $(0, +\infty)$  limitu. Když ale vezmeme interval  $\langle 0, +\infty \rangle$  se stejnou metrikou  $d(x, y) = |x - y|$ , tak metrický prostor už je úplný.



## 5 Banachova věta

**Definice 6** *Nechť  $(M, \varrho)$  je metrický prostor. Řekneme, že zobrazení  $F : M \rightarrow M$  je kontraktivní na  $M$ , existuje-li  $q \in \langle 0, 1 \rangle$  takové, že*

$$\forall x, y \in M : \varrho(F(x), F(y)) \leq q\varrho(x, y).$$

**Věta 5 (Banachova věta o pevném bodě.)** *Nechť  $(M, \varrho)$  je úplný metrický prostor a nechť zobrazení  $F : M \rightarrow M$  je kontraktivní. Pak má  $F$  právě jeden pevný bod  $x^* \in M$ .*

**Důkaz**

1. *Existence.* Nejprve si zvolíme libovolné  $x_0 \in M$  a definujeme rekurentně posloupnost  $(x_n) \subset M$ :

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n = F(x_{n-1}).$$

Protože zobrazení  $F$  je kontraktivní, pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí, že

$$\begin{aligned} \varrho(x_n, x_{n-1}) &= \varrho(F(x_{n-1}), F(x_{n-2})) \leq q\varrho(x_{n-1}, x_{n-2}) = q\varrho(F(x_{n-2}), F(x_{n-3})) \leq \\ &\leq q^2\varrho(x_{n-2}, x_{n-3}) \leq \dots \leq q^{n-1}\varrho(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Následně pomocí těchto odhadů a trojúhelníkové nerovnosti ověříme, že pro každé  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $n > m$ , je

$$\begin{aligned} \varrho(x_n, x_m) &\leq \varrho(x_n, x_{n-1}) + \varrho(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + \varrho(x_{m+1}, x_m) \leq \\ &\leq (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q^m) \varrho(x_1, x_0) \leq \\ &\leq (q^m + \dots + q^{n-2} + q^{n-1} + \dots) \varrho(x_1, x_0) = \frac{q^m}{1-q} \varrho(x_1, x_0). \end{aligned} \tag{8}$$

Odtud vyplývá, že posloupnost  $(x_n)$  je cauchyovská, protože

$$\frac{q^m}{1-q} \varrho(x_1, x_0) \rightarrow 0 \text{ pro } m \rightarrow +\infty.$$

Protože  $M$  je úplný metrický prostor, existuje takové  $x \in M$ , pro které  $x_n \rightarrow x$ . To, že  $x$  je hledaným pevným bodem  $F$ , je přímým důsledkem pozorování:

$$0 \leq \varrho(F(x_n), F(x)) \leq q \underbrace{\varrho(x_n, x)}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \Rightarrow F(x_n) \rightarrow F(x)$$

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow x_{n+1} = F(x_n) \rightarrow x.$$

Protože každá posloupnost má nejvýše jednu limitu, dostaneme

$$F(x) = x.$$

2. *Jednoznačnost.* Mějme  $x, y \in M$ , kde

$$x = F(x), y = F(y).$$

Pak platí

$$\varrho(x, y) = \varrho(F(x), F(y)) \leq q\varrho(x, y) \quad (F \text{ je kontraktivní}),$$

kde  $q \in \langle 0, 1 \rangle$ , a proto

$$\varrho(x, y) \cdot \underbrace{(1 - q)}_{>0} \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\varrho(x, y) \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = y.$$

■

**Poznámka 3** Rychlost konvergence posloupnosti  $(x_n)$  je závislá na velikosti  $q$ . Vezmeme si nerovnost (8) z důkazu Banachovy věty

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}, m < n) : \varrho(x_n, x_m) \leq \frac{q^m}{1 - q} \cdot \varrho(x_1, x_0).$$

Když si zvolíme  $m$  pevné a  $n \rightarrow +\infty$ , pak  $x_n \rightarrow x$ , a z předchozí nerovnosti dostaneme

$$\varrho(x, x_m) \leq \frac{q^m}{1 - q} \cdot \varrho(x_1, x_0),$$

$$\varrho(x, x_m) \leq q^m \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - q} \cdot \varrho(x_1, x_0)}_{\text{konst.}}$$

Z poslední nerovnosti vidíme, že čím více se bude  $q$  blížit 0, tím rychleji bude posloupnost  $(x_n)$  konvergovat.

**Poznámka 4** Věta 2 je snadným důsledkem Banachovy věty, protože jako úplný metrický prostor zde máme prostor reálných čísel s euklidovskou metrikou.

## 6 Aplikace Banachovy věty

### Numerický výpočet odmocniny.

Jako první aplikaci můžeme vzít výpočet (druhé) odmocniny z čísla  $a \in (0, +\infty)$ . Uvažujme zobrazení  $F : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  definované předpisem

$$F(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right). \quad (9)$$

Všimněme si, že pevný bod  $F$  je právě  $\sqrt{a}$ , neboť

$$x = \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right)$$

$$\Updownarrow$$

$$2x = x + \frac{a}{x}$$

$$\Updownarrow$$

$$2x^2 = x^2 + a$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 = a$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \sqrt{a}.$$

Abychom mohli tento pevný bod počítat iteračně, je potřeba ověřit předpoklady Banachovy věty. Prostor  $(0, +\infty)$  (s euklidovskou metrikou) však není úplný. Vezmeme tedy interval  $I = \langle \sqrt{a}, +\infty \rangle$ , který s euklidovskou metrikou již tvoří úplný metrický prostor. Nastává zde ale otázka, zdali bude platit  $F$  zobrazovat tento interval do sebe, tzn.

$$(\forall x \in I) : F(x) \in I.$$

To ověříme tak, že zjistíme průběh funkce  $F$  na intervalu  $I$ . Nejprve vypočítáme první derivaci funkce  $F$

$$F'(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a}{x^2} \right). \quad (10)$$

Můžeme si všimnout, že pro  $x \in I$  platí

$$x \geq \sqrt{a} \Rightarrow x^2 \geq a \Rightarrow 1 \geq \frac{a}{x^2} \Rightarrow \left( 1 - \frac{a}{x^2} \right) \geq 0,$$

z čehož plyne

$$F'(x) \geq 0. \quad (11)$$

Tedy platí, že funkce  $F$  je neklesající na intervalu  $I$ , a proto víme, že nejmenší funkční hodnoty bude funkce  $F$  nabývat v bodě  $x = \sqrt{a}$ . A jak jsme si ukázali dříve, tak  $F(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ . A díky tomu, že  $F$  je neklesající na  $I$ , tak pro všechna  $x \in I$  platí

$$F(x) \geq F(\sqrt{a}) \Rightarrow F(x) \geq \sqrt{a} \Rightarrow F(x) \in I.$$

Nyní ověříme, zdali je funkce  $F$  kontraktivní na intervalu  $\langle \sqrt{a}, +\infty \rangle$ . Zřejmě

$$(\forall x \in I) : F'(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a}{x^2} \right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow (F'(x) \geq 0)$$

$$(\forall x \in I) : |F'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

Kontraktivita funkce  $F$  na intervalu  $I$  (s konstantou  $\frac{1}{2}$ ) pak lehce plyne z Lagrangeovy věty o střední hodnotě. Proto můžeme rekurentně definovat posloupnost  $x_n \subset \langle \sqrt{a}, +\infty \rangle$

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n = \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right),$$

kde si zvolíme libovolné  $x_0 \in \langle \sqrt{a}, +\infty \rangle$ . Z Banachovy věty plyne, že  $(x_n)$  konverguje k pevnému bodu funkce  $F$ , tj. k  $\sqrt{a}$ . Tato posloupnost dosáhne značné přesnosti během několika kroků, protože jak jsme si ukázali dříve (poznámka 3), tak naše posloupnost bude každým krokem zmenšovat nepřesnost zhruba o polovinu předchozí nepřesnosti.

**Poznámka 5** Podívejme se na to, jak bychom počítali  $\sqrt{a}$  pomocí Newtonovy metody. Budeme tedy hledat kořen

$$f(x) = x^2 - a.$$

Dostali jsme problém hledání kořenu nelineární rovnice. Pro výpočet přibližného řešení se využívá Newtonova vzorce, který má předpis[2]

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Nyní dosadíme do vztahu (12) funkci  $f(x) = x^2 - a$  a dostaneme

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - a}{2x_{n-1}} = \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right). \quad (13)$$

Jak můžeme vidět, tak Newtonova metoda nám vrací stejný předpis numerického výpočtu odmocniny pro iterativní proces jako Banachova věta.

### Řešení soustavy $n$ rovnic o $n$ neznámých.

Než se pustíme do aplikace Banachovy věty na řešení soustavy  $n$  rovnic o  $n$  neznámých, tak si připomeneme několik věcí z lineární algebry.

**Definice 7 (Vlastní čísla.)** Nechť  $B \in \mathbb{C}^{n,n}$  je čtvercová matice. Vlastním číslem matice  $B$  se nazývá komplexní číslo  $\lambda$ , pro které existuje vektor  $v \in \mathbb{C}^n$ ,  $v \neq 0$  takový, že

$$B \cdot v = \lambda \cdot v.$$

Vektoru  $v$  budeme říkat vlastní vektor matice  $B$  příslušný vlastnímu číslu  $\lambda \in \mathbb{C}$ . [4]

**Poznámka 6** Pokud je  $B$  symetrická reálná matice, tak jsou všechny její vlastní čísla reálná.

**Důkaz** Nechť  $B$  je symetrická reálná matice,  $\lambda \in \mathbb{C}$  je vlastní číslo matice  $B$  a  $v \in \mathbb{C}^n$  je odpovídající vlastní vektor. Pak

$$\begin{aligned} \overline{\lambda}(v^T \cdot v) &= (\overline{\lambda}v)^T \cdot v = (\overline{B \cdot v})^T \cdot v = \overline{(B \cdot v)^T} \cdot v = \overline{v^T} \cdot \overline{B^T} \cdot v = \\ &= \overline{v^T} \cdot \overline{B} \cdot v = \overline{v^T} \cdot B \cdot v = \overline{v^T} \cdot (B \cdot v) = \overline{v^T} \cdot (\lambda v) = \lambda(\overline{v^T} \cdot v). \end{aligned}$$

Protože je vektor  $v$  nenulový, je

$$\overline{v^T} \cdot v \neq 0,$$

a proto musí být číslo  $\lambda$  rovno komplexně sdruženému číslu  $\overline{\lambda}$ , tedy  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Zároveň je jasné, že i odpovídající vlastní vektor lze vzít reálný. ■

**Definice 8** Nechť  $B \in \mathbb{R}^{n,n}$  je symetrická matice. Matici  $B$  nazveme pozitivně definitní, jestliže pro každý nenulový vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  platí [4]

$$x^T \cdot B \cdot x > 0.$$

**Poznámka 7** Pokud je  $B$  reálná symetrická pozitivně definitní matice, tak jsou všechna její vlastní čísla kladná.

**Důkaz** Nechť  $B$  je reálná symetrická pozitivně definitní matice,  $\lambda \in \mathbb{R}$  je vlastní číslo matice  $B$  a  $v \in \mathbb{R}^n$  je odpovídající vektor. Pak platí

$$0 < v^T \cdot B \cdot v = v^T \cdot \lambda v = \lambda v^T \cdot v = \lambda \underbrace{(v^T \cdot v)}_{>0}.$$

■

**Definice 9 (Ortogonalní matice.)** Nechť  $B$  je čtvercová matice. Matici  $B$  nazveme ortogonální, pokud platí [4]

$$B^T B = E = B B^T.$$

**Poznámka 8** Pokud je matice  $B$  ortogonální, pak je i matice  $B^T$  ortogonální.

**Lemma 6.1** *Nechť  $U \in \mathbb{R}^{n,n}$  je ortogonální matice a  $x \in \mathbb{R}^n$  je vektor. Pak platí*

$$\|U \cdot x\| = \|x\|.$$

**Důkaz** Nechť  $U \in \mathbb{R}^{n,n}$  je ortogonální matice a  $x \in \mathbb{R}^n$  je sloupcový vektor. Víme, že

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{x^T \cdot x},$$

tedy

$$\|x\|^2 = x^T \cdot x.$$

Odtud

$$\|U \cdot x\|^2 = (U \cdot x)^T \cdot U \cdot x = x^T \cdot \underbrace{U^T \cdot U}_{=E} \cdot x = \|x\|^2.$$

■

**Věta 6 (Spektrální rozklad.)** *Nechť  $B$  je reálná symetrická matice. Pak existuje (reálná) ortogonální matice  $U$  a diagonální matice  $D$  tak, že*

$$B = U^T D U.$$

Řádky  $r_i^U$  matice  $U$  jsou transponované ortogonální vlastní vektory matice  $B$  příslušné vlastním číslům  $\lambda_i = [D]_{ii}$ .

Pro řešení soustavy  $n$  rovnic o  $n$  neznámých se Banachova věta využívá k iterativnímu procesu pro nalezení přesného nebo alespoň přibližného řešení. Mějme tedy soustavu

$$A \cdot x = b,$$

kde  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  a  $b \in \mathbb{R}^n$ . Budeme předpokládat, že matice  $A$  je symetrická, tj.

$$A = A^T,$$

a že je pozitivně definitní, tj. všechna vlastní čísla jsou kladná, jak jsme si ukázali dříve (poznámka 7).

Víme, že  $\mathbb{R}^n$  s euklidovskou metrikou  $\varrho$  tvoří úplný metrický prostor. Mějme zobrazení  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , které je definované předpisem

$$T(x) = x - \omega(Ax - b),$$

kde  $\omega > 0$  je parametr, který si specifikujeme později.[8] Volba čísla  $\omega$  nám ovlivní kontraktivitu zobrazení  $T$ . Bod  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  je pevným bodem zobrazení  $T$  právě tehdy, když platí

$$\begin{aligned}
T(\tilde{x}) &= \tilde{x} \\
&\Downarrow \\
\tilde{x} - \omega (A\tilde{x} - b) &= \tilde{x} \\
&\Downarrow \\
(A\tilde{x} - b) &= 0 \\
&\Downarrow \\
A\tilde{x} &= b.
\end{aligned}$$

Ověřili jsme si, že pevný bod zobrazení  $T$  je zároveň řešením soustavy  $n$  rovnic o  $n$  neznámých. Nyní se můžeme pustit do ověření kontraktivity zobrazení  $T$ , tj. budeme hledat hodnotu parametru  $\omega > 0$  tak, aby platilo

$$(\exists q < 1) (\forall x, y \in \mathbb{R}^n) : \varrho(T(x), T(y)) \leq q \varrho(x, y).$$

Poslední nerovnost lze podle (7) přepsat

$$(\exists q < 1) (\forall x, y \in \mathbb{R}^n) : \|T(x) - T(y)\| \leq q \|x - y\|.$$

Nejprve se podíváme na výraz v normě na levé straně poslední nerovnosti

$$T(x) - T(y) = (x - y) - \omega (A(x - y)).$$

Protože matice  $A$  je symetrická reálná matice, můžeme na ni aplikovat spektrální rozklad (podle věty 6)

$$T(x) - T(y) = (x - y) - \omega (U^T D U(x - y)),$$

kde  $U \in \mathbb{R}^{n,n}$  je ortogonální matice a  $D \in \mathbb{R}^{n,n}$  je diagonální matice, která má na diagonále vlastní čísla matice  $A$ . Lze přitom předpokládat, že

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n, \lambda_i = [D]_{ii}.$$

Jelikož víme, že  $U^T U = E$ , tak i  $U^T E U = E$ , a protože násobení jednotkovou maticí nijak neovlivní výsledek, tak můžeme poslední rovnost upravit následovně

$$T(x) - T(y) = U^T E U(x - y) - \omega (U^T D U(x - y)),$$

$$T(x) - T(y) = U^T (E - \omega D) U (x - y) .$$

Nyní dosadíme do normy

$$\|T(x) - T(y)\| = \|U^T (E - \omega D) U (x - y)\| .$$

Protože víme, že když je matice  $U$  ortogonální, tak i  $U^T$  je ortogonální, můžeme poslední rovnost upravit podle lemmatu 6.1 následovně

$$\|T(x) - T(y)\| = \|(E - \omega D) U (x - y)\| .$$

Zvolíme si substituci

$$z = U (x - y) , \tag{14}$$

kde  $z$  je sloupcový vektor, a dosadíme

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(y)\| &= \|(E - \omega D) z\| = \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 1 - \omega\lambda_1 & & & 0 \\ & 1 - \omega\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 - \omega\lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \right\| = \\ &= \left\| \begin{bmatrix} (1 - \omega\lambda_1) z_1 \\ (1 - \omega\lambda_2) z_2 \\ \vdots \\ (1 - \omega\lambda_n) z_n \end{bmatrix} \right\| = \\ &= \sqrt{(1 - \omega\lambda_1)^2 z_1^2 + \dots + (1 - \omega\lambda_n)^2 z_n^2} . \end{aligned}$$

Zvolíme-li

$$q = \max \{ |1 - \omega\lambda_1| , |1 - \omega\lambda_2| , \dots , |1 - \omega\lambda_n| \} , \tag{15}$$

pak platí

$$\begin{aligned} \sqrt{(1 - \omega\lambda_1)^2 z_1^2 + \dots + (1 - \omega\lambda_n)^2 z_n^2} &\leq \\ &\leq \sqrt{q^2 (z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2)} = \\ &= q \cdot \|z\| . \end{aligned}$$

Nyní za  $z$  dosadíme původní tvar podle (14)

$$q \cdot \|z\| = q \cdot \|U (x - y)\| .$$



Vzhledem k tomu, že i matice  $U$  je ortogonální, tak můžeme poslední rovnost upravit podle lemmatu 6.1 následovně

$$q \cdot \|U(x - y)\| = q \cdot \|x - y\|,$$

z čehož jde vidět, že platí

$$\|T(x) - T(y)\| \leq q \cdot \|x - y\|.$$

Aby zobrazení  $T$  bylo kontraktivní, muselo by být  $q < 1$ . To ale vzhledem k (15) znamená

$$\begin{aligned} |1 - \omega\lambda_1| &< 1 \\ |1 - \omega\lambda_2| &< 1 \\ &\vdots \\ |1 - \omega\lambda_n| &< 1 \end{aligned} \quad (16)$$

Z (16) již lze stanovit hodnotu parametru  $\omega$ . Protože

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n,$$

je zřejmé, že stačí zvolit parametr  $\omega$  tak, aby

$$0 < \omega \leq \frac{1}{\lambda_n}, \quad (17)$$

neboť pro  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$  platí

$$0 \leq 1 - \omega\lambda_i \leq 1 - \omega\lambda_1 < 1.$$

Číslo  $q$  dopočítáme podle (15) následovně

$$q = \max\{|1 - \omega\lambda_1|, |1 - \omega\lambda_2|, \dots, |1 - \omega\lambda_n|\} = 1 - \omega\lambda_1. \quad (18)$$

Pokud bychom zvolili

$$\omega = \frac{1}{\lambda_n},$$

pak by se  $q$  dopočítalo jako

$$q = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}.$$

Převrácená hodnota zlomku  $\frac{\lambda_1}{\lambda_n}$ , tedy  $\frac{\lambda_n}{\lambda_1}$ , je číslo podmíněnosti matice, které nám kvalitativně charakterizuje matici  $A$  a do značné míry determinuje chování řady numerických algoritmů. Tedy můžeme říct, že když se číslo podmíněnosti matice bude blížit k 1, tak nám bude iterativní proces konvergovat rychle, zatímco když bude číslo podmíněnosti velké, tak nám iterativní proces bude konvergovat pomalu.

**Příklad** Najděte řešení pomocí Banachovy věty zadané soustavy rovnic

$$\begin{aligned}4x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 &= 8\end{aligned}$$

Nejprve si převedeme soustavu rovnic na maticový tvar

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}}_b.$$

Abychom mohli aplikovat iterativní proces na zobrazení  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definované předpisem

$$T(x) = x - \omega(A \cdot x - b),$$

musíme zjistit hodnotu čísla  $\omega$ , které splňuje (17). K tomu potřebujeme vypočítat vlastní čísla matice  $A$ .

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 71\lambda + 107 = 0.$$

K tomuto výpočtu využijeme výpočetní program Maple, který nám vrátil tyto výsledky

$$7.214319744 - 2.10^{-10}i \quad 3.324869129 + 0.1i \quad 4.460811127 + 0.1i$$

Jak můžeme vidět, tak u prvního čísla nám program vypočetl číslo s imaginární částí. Protože platí, že symetrická reálná matice má všechna vlastní čísla reálné, můžeme předpokládat, že se jedná o chybu výpočtu a můžeme imaginární část zanedbat. Číslo  $\omega$  tedy spočítáme

$$\omega_p = \frac{1}{7.214319744} = 0.1386132075.$$

Protože výpočet vlastních čísel v praxi není jednoduchý proces a v případě velkých matic se nemusíme dočkat výsledku, bylo by dobré, kdybychom mohli alespoň největší vlastní číslo odhadnout pro jednodušší výpočet. K tomu nám poslouží následující věta.

**Věta 7 (Geršgorin.)** Nechť  $B = [b_{ij}]$  je čtvercová komplexní matice řádu  $n$  a nechť

$$r_i = |b_{i1}| + \dots + \widehat{|b_{ii}|} + \dots + |b_{in}| \quad a \quad S_i = \{x \in \mathbb{C} : |x - b_{ii}| \leq r_i\},$$

kde stříška nad symbolem značí jeho vynechání. Pak

$$\sigma(B) \subset S_1 \cup \dots \cup S_n.[4]$$

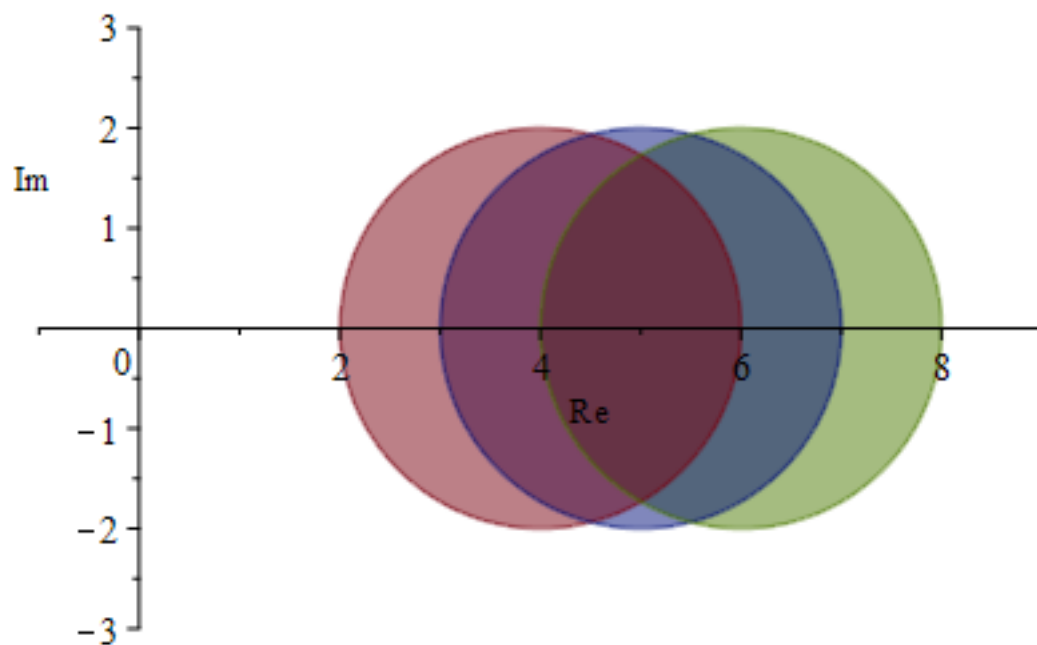
Tuto větu si graficky můžeme představit tak, že do roviny komplexních čísel zakreslíme kruhy se středy v bodech odpovídající diagonálním prvkům matice  $A$  a poloměrech, pro které platí

$$r_{a_{ii}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}.$$

Pak spektrum matice  $A$ , tj. množina všech vlastních čísel, je podmnožinou sjednocení obsahu těchto kruhů. Pro náš příklad bude výpočet vypadat následovně

$$\begin{array}{lll} r_{a_{11}} = 1 + 1 & r_{a_{22}} = 1 + 1 & r_{a_{33}} = 1 + 1 \\ r_{a_{11}} = 2 & r_{a_{22}} = 2 & r_{a_{33}} = 2 \end{array}.$$

Nyní vykreslíme do komplexní roviny.



Obrázek 8: Odhad spektra matice  $A$ .

Protože  $A$  je reálná symetrická matice, jsou všechna její vlastní čísla reálná. Z obrázku je navíc zřejmé, že všechna vlastní čísla leží v intervalu  $\langle 2, 8 \rangle$ . Odtud mimo jiné máme, že  $A$  je pozitivně definitní. Z grafu lze zjistit, že největší možné (reálné) vlastní číslo matice  $A$  bude maximálně 8, tzn.

$$\lambda_n \leq 8.$$

Tedy číslo  $\omega$  si můžeme zvolit

$$\omega = \frac{1}{8},$$

které zároveň splňuje podmínku (17), protože

$$\frac{1}{\lambda_n} \geq \underbrace{\frac{1}{8}}_{\omega}.$$

Po dosazení do zobrazení  $T$  dostaneme

$$T(x) = x - \frac{1}{8}(Ax - b).$$

Nyní si zvolíme libovolnou počáteční podmínku, například

$$x_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ 13 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

pro iterativní proces

$$x_n = x_{n-1} - \frac{1}{8}(Ax_{n-1} - b), n \in \mathbb{N}.$$

Přesné řešení této soustavy rovnic je

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pomocí výpočetního programu Maple si ukážeme, po kolika iteracích se dostaneme k přesnému řešení na 6 desetinných míst.

$$\begin{array}{ll} x_{26} := \begin{bmatrix} 1.0000074509481902 \\ 0.9999964082578798 \\ 0.9999985593895349 \end{bmatrix} & x_{29} := \begin{bmatrix} 1.0000014872385463 \\ 0.9999992837961542 \\ 0.9999997119511086 \end{bmatrix} \\ x_{27} := \begin{bmatrix} 1.0000043545181683 \\ 0.9999979018044893 \\ 0.9999991574466249 \end{bmatrix} & x_{30} := \begin{bmatrix} 1.0000008691508653 \\ 0.9999995815248509 \\ 0.9999998316084395 \end{bmatrix} \\ x_{28} := \begin{bmatrix} 1.0000025448526948 \\ 0.9999987741810843 \\ 0.999999507321324 \end{bmatrix} & x_{31} := \begin{bmatrix} 1.0000005079337713 \\ 0.999999755476906 \\ 0.9999999015676454 \end{bmatrix} \end{array}$$

Obrázek 9: Výsledky iterace pro odhadnuté vlastní číslo.

A jak můžeme vidět, tak u 30. iterace dostáváme celkem přesný výsledek. Pokud za číslo  $\omega$  dosadíme vypočtené největší vlastní číslo, tak dostaneme celkem přesný výsledek již po 26 iteracích, jak můžeme vidět na následujícím obrázku.

$$\begin{aligned}
x_{23} &:= \begin{bmatrix} 1.000005846566781 \\ 0.9999971841929515 \\ 0.9999988678401401 \end{bmatrix} & x_{26} &:= \begin{bmatrix} 1.0000009162457872 \\ 0.999995589702805 \\ 0.999999822401137 \end{bmatrix} \\
x_{24} &:= \begin{bmatrix} 1.0000031521616397 \\ 0.9999984822541201 \\ 0.9999993893306699 \end{bmatrix} & x_{27} &:= \begin{bmatrix} 1.0000004939808096 \\ 0.999997622467812 \\ 0.999999904235202 \end{bmatrix} \\
x_{25} &:= \begin{bmatrix} 1.000001699463157 \\ 0.9999991818678423 \\ 0.9999996706600663 \end{bmatrix} & x_{28} &:= \begin{bmatrix} 1.0000002663217538 \\ 0.999998718274636 \\ 0.9999999483642686 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Obrázek 10: Iterace pro přesné největší vlastní číslo.

Číslo  $q$  nelze vždy určit, když používáme Geršgorinovu větu, protože kruhy mohou obsahovat i záporná čísla. V takovém případě by nešlo rozumně odhadnout nejmenší vlastní číslo. To se ale netýká našeho příkladu, kde jde krásně vidět, že nejmenší reálné vlastní číslo je alespoň 2. A podle vzorce (18) dopočítáme

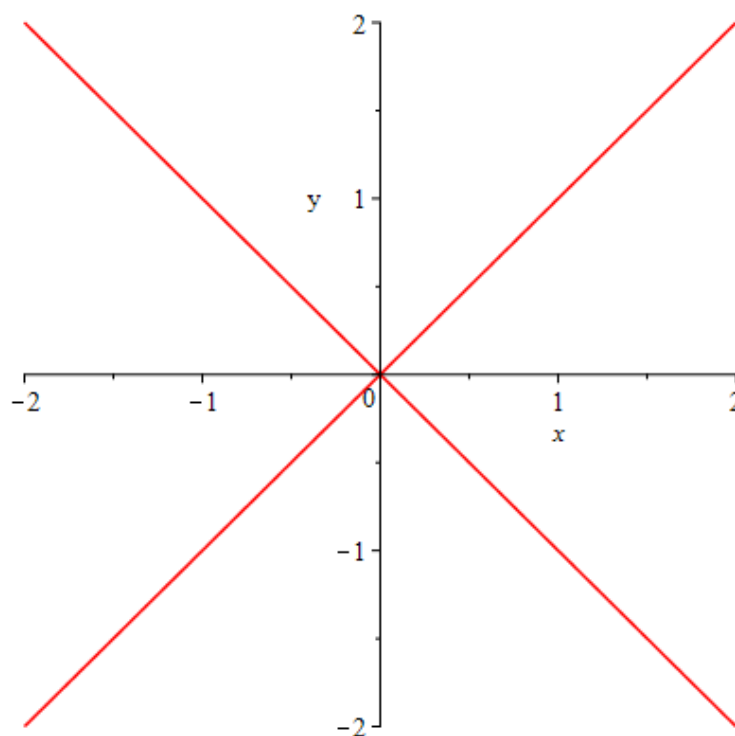
$$q = 1 - \frac{2}{8} = \frac{3}{4}.$$

### Implicitní funkce.

V následující kapitole uvidíme, jak lze pěkně Banachovu větu použít k důkazu věty o implicitní funkci. Nejprve řekneme, co to jsou implicitní funkce. Pro zjednodušenou představu se budeme zabývat funkcemi jedné proměnné, které jsou dané implicitně.

**Definice 10** *O funkci jedné proměnné  $y = f(x)$  řekneme, že je implicitně zadána rovnicí  $F(x, y) = 0$  o dvou neznámých, jestliže body grafu funkce  $f$ , tj. dvojice  $(x, f(x))$ , této rovnici vyhovují, tudíž platí  $F(x, f(x)) = 0$  pro každé  $x \in D(f)$ . Což lze také říci tak, že graf funkce  $f$  je podmnožinou množiny všech řešení rovnice  $F(x, y) = 0$ . [5]*

Jako příklad uvažujme rovnici  $x^2 - y^2 = 0$ , kde množina řešení vypadá následovně.



Obrázek 11:  $x^2 - y^2 = 0$ .

Jak můžeme vidět, tak množina řešení rovnice  $x^2 - y^2 = 0$  je tvořena dvojicí přímek. Množinu můžeme rozdělit na grafy funkce  $y = x$  a  $y = -x$ , ale také na  $y = |x|$  a  $y = -|x|$ . Všechny tyto funkce jsou spojité. Nyní si představme, že známe jedno řešení  $(x_0, y_0)$  rovnice  $F(x, y) = 0$ , tj. že platí  $F(x_0, y_0) = 0$ . Budeme chtít dokázat, že existuje obdélníkové okolí  $\Omega$  se středem v bodě  $(x_0, y_0)$  takové, že množina všech řešení rovnice  $F(x, y) = 0$ , která budou v  $\Omega$ , bude tvořit graf funkce proměnné  $x$  procházející bodem  $(x_0, y_0)$ . V případě rovnice  $x^2 - y^2 = 0$  je zřejmé, že v okolí bodu  $(1, 1)$  zadává implicitně funkci, a to  $y = x$ . Zatímco v sebemenším okolí bodu  $(0, 0)$  nebudou řešení rovnice tvořit graf funkce proměnné  $x$ .

**Věta 8 (Věta o implicitní funkci.)**

Nechť

1.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
2.  $f(a, b) = 0$
3.  $f$  je spojitá v  $(a, b)$
4.  $\frac{\partial f}{\partial y}$  je spojitá v  $(a, b)$
5.  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ .

Pak

$$(\exists \delta, \varepsilon > 0)(\forall x \in (a - \delta, a + \delta))(\exists! y \stackrel{\text{ozn}}{=} \varphi(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)) : f(x, y) = 0.$$

Navíc je funkce  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (definovaná výše) je spojitá v bodě  $a$ . [7]

**Důkaz** Mějme tedy funkci  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a bod  $(a, b)$  splňující předpoklady věty 8. Pro dané  $x$  mějme zobrazení  $T_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , které je definované předpisem

$$T_x(y) = y - \frac{f(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}. \quad (20)$$

Bod  $y$  bude pevným bodem zobrazení  $T_x$  právě tehdy, když

$$\begin{aligned} T_x(y) &= y \\ \Updownarrow \\ y - \frac{f(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)} &= y \\ \Updownarrow \\ \frac{f(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)} &= 0. \end{aligned}$$

Protože  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  je nenulová konstanta, tak bude poslední rovnost platit právě tehdy, když

$$f(x, y) = 0.$$

Pokud chceme aplikovat na zobrazení  $T_x$  Banachovu větu, tak musíme ověřit její předpoklady. V první řadě si rozmyslíme, pro která  $x \in \mathbb{R}$  je zobrazení  $T_x$  kontraktivní. Nejprve si spočítáme derivaci  $T_x$

$$T'_x(y) = 1 - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}.$$



Pokud se  $(x, y) \rightarrow (a, b)$ , pak  $T'_x(y) \rightarrow 0$  podle předpokladu 4 věty 8. Tedy bude existovat takové  $\varepsilon > 0$ , pro které platí

$$(\forall x \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle)(\forall y \in \langle b - \varepsilon, b + \varepsilon \rangle) : |T'_x(y)| \leq \frac{1}{2}. \quad (21)$$

Z (21) podle Lagrangeovy věty pak plyne

$$(\forall x \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle)(\forall y_1, y_2 \in \langle b - \varepsilon, b + \varepsilon \rangle) : |T_x(y_1) - T_x(y_2)| \leq \frac{1}{2} |y_1 - y_2|. \quad (22)$$

To znamená, že pro každé  $x \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$  je zobrazení  $T_x$  kontraktivní na  $\langle b - \varepsilon, b + \varepsilon \rangle$ .

Nyní musíme ověřit, zdali zobrazení  $T_x$  zobrazuje interval  $\langle b - \varepsilon, b + \varepsilon \rangle$  do sebe. Buď nyní  $x \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$  pevně vybráno. Potřebovali bychom, aby

$$(\forall y \in \langle b - \varepsilon, b + \varepsilon \rangle) : T_x(y) \in \langle b - \varepsilon, b + \varepsilon \rangle.$$

Z  $y \in \langle b - \varepsilon, b + \varepsilon \rangle$  plyne, že

$$|y - b| \leq \varepsilon,$$

a chceme tedy, aby platilo i

$$|T_x(y) - b| \leq \varepsilon.$$

To ověříme následujícím výpočtem

$$|T_x(y) - b| = |T_x(y) - T_x(b) + T_x(b) - b|.$$

Podle trojúhelníkové nerovnosti můžeme pravou stranu poslední rovnosti upravit takto

$$\begin{aligned} |T_x(y) - b| &= |T_x(y) - T_x(b) + T_x(b) - b| \leq |T_x(y) - T_x(b)| + |T_x(b) - b| \leq \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{2} |y - b|}_{\text{podle (22)}} + \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right|}_{\text{podle (20)}} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{|f(x, b)|}{\left| \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right|}. \end{aligned} \quad (23)$$

Chceme, aby

$$\frac{1}{2} \varepsilon + \frac{|f(x, b)|}{\left| \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right|} < \varepsilon,$$

což bude platit, pokud

$$\frac{|f(x, b)|}{\left| \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right|} < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Všimněme si, že pro  $x \rightarrow a$  (podle předpokladů 2 a 3 věty 8) platí

$$\frac{|f(x, b)|}{\left| \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right|} \rightarrow \frac{|f(a, b)|}{\left| \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right|} = 0,$$

tedy bude existovat  $\delta > 0, \delta < \varepsilon$ , pro které platí

$$(\forall x \in (a - \delta, a + \delta)) : \frac{|f(x, b)|}{\left| \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right|} < \frac{1}{2} \varepsilon. \quad (24)$$

Tedy  $\forall x \in (a - \delta, a + \delta)$  je zobrazení  $T_x : \langle b - \varepsilon, b + \varepsilon \rangle \rightarrow \langle b - \varepsilon, b + \varepsilon \rangle$  kontraktivní zobrazení úplného metrického prostoru  $\langle b - \varepsilon, b + \varepsilon \rangle$  (s metrikou  $\varrho(x, y) = |x - y|$ ) do sebe, takže z Banachovy věty vyplývá, že

$$(\forall x \in (a - \delta, a + \delta))(\exists! y \in \langle b - \varepsilon, b + \varepsilon \rangle) : T_x(y) = y,$$

což lze přepsat

$$(\forall x \in (a - \delta, a + \delta))(\exists! y \in \langle b - \varepsilon, b + \varepsilon \rangle) : f(x, y) = 0.$$

Když si vezmeme pevný bod  $y^*$  zobrazení  $T_x$ , tak pro něj podle (23) a (24) platí

$$|y^* - b| = |T_x(y^*) - b| < \varepsilon,$$

z čehož plyne, že pevný bod  $y^*$  leží ve skutečnosti v otevřeném intervalu  $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ . Nyní nám zbývá jen dokázat, že funkce  $\varphi$  je spojitá v bodě  $a$ . Víme, že podle (23) pro  $\forall x \in (a - \delta, a + \delta)$  platí

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(a)| &= |\varphi(x) - b| = \\ &= |T_x(\varphi(x)) - b| \leq \frac{1}{2} |\varphi(x) - b| + \frac{|f(x, b)|}{\left| \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right|} \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{2} |\varphi(x) - b| &\leq \frac{|f(x, b)|}{\left| \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right|}. \end{aligned}$$

Když se bude  $x \rightarrow a$ , pak

$$\frac{|f(x, b)|}{\left| \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right|} \rightarrow 0,$$

z čehož plyne, že i

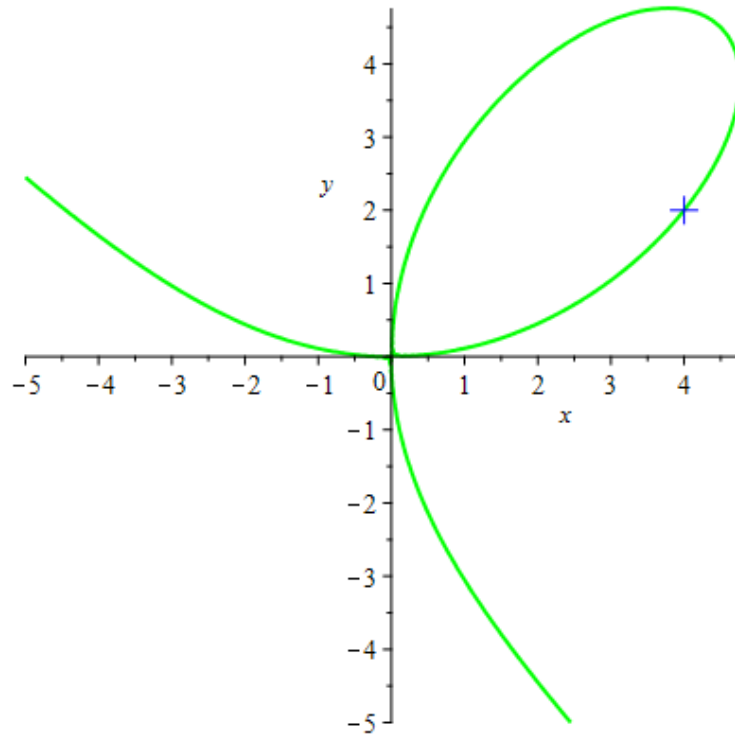
$$\frac{1}{2} |\varphi(x) - b| \rightarrow 0,$$

odkud

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b = \varphi(a),$$

tedy funkce  $\varphi$  je spojitá v bodě  $a$ . ■

**Příklad** Uvažujme funkci  $f(x, y) = x^3 - 9xy + y^3$ , množinu  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$  a bod  $(4, 2)$ . Najděte přibližnou funkci  $y = \varphi(x)$  na okolí bodu  $(4, 2)$ .



Obrázek 12: Množina  $M$  s vyznačeným bodem  $(4, 2)$ .

Všimněme si, že  $(4, 2) \in M$ , neboť

$$f(4, 2) = 4^3 - 9 \cdot 4 \cdot 2 + 2^3 = 64 - 72 + 8 = 0.$$

Funkce  $f$  je určitě spojitá v bodě  $(4, 2)$ . Dále musíme ověřit, zdali je parciální derivace funkce  $f$  podle  $y$  také spojitá a nenulová v bodě  $(4, 2)$ . Parciální derivace funkce  $f$  podle  $y$  nám vyšla

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -9x + 3y^2,$$

a ta je také spojitá v bodě  $(4, 2)$ . A po dosazení bodu  $(4, 2)$  do derivace dostaneme

$$\frac{\partial f(4, 2)}{\partial y} = -9 \cdot 4 + 3 \cdot 2^2 = -24 \neq 0.$$

Máme tedy splněny předpoklady věty 8, z čehož plyne, že

$$(\exists \delta, \varepsilon > 0)(\forall x \in (4 - \delta, 4 + \delta))(\exists! y \stackrel{ozn.}{=} \varphi(x) \in (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)) : \underbrace{f(x, y) = 0}_{(x, y) \in M}.$$

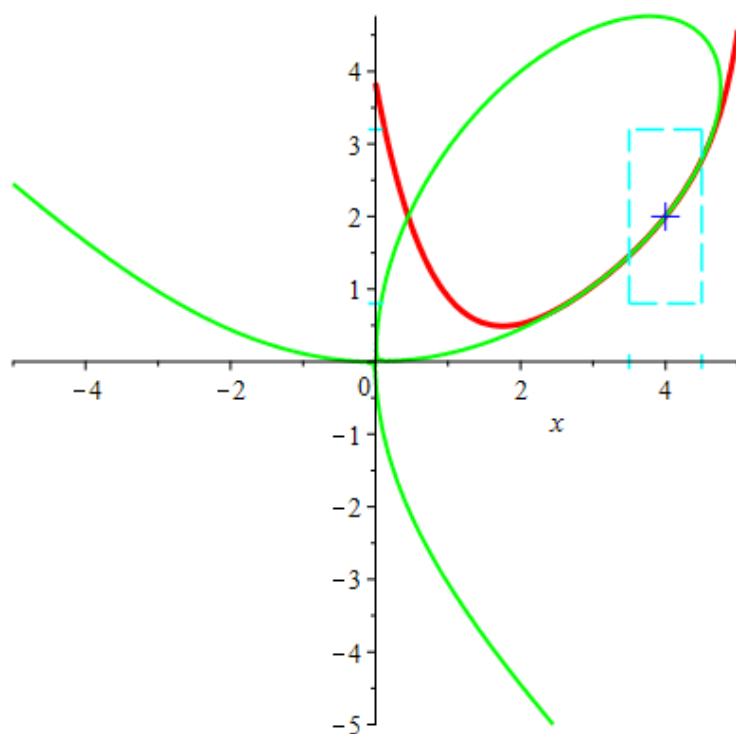
Nyní se pokusíme přibližně spočítat  $\varphi(x)$ . K nálezu přibližné funkce  $y = \varphi(x)$  v okolí bodu  $(4, 2)$  využijeme zobrazení (20), kde po dosazení dostaneme funkci

$$T_x(y) = y + \frac{x^3}{24} + \frac{y^3}{24} - \frac{3xy}{8}.$$

Nyní můžeme využít iterativního procesu. Jako počáteční podmínku si vybereme funkci  $y_0 = 2$ , protože jistě víme, že prochází bodem  $(4, 2)$ . K výpočtu opět využijeme program Maple, který nám spočítá jednotlivé iterace, a také z důvodu, že vypočtené polynomy jsou dost velké po několika iteracích, jak lze vidět na obrázku níže.

$$\begin{aligned} y_1 &:= \frac{1}{24}x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{7}{3} \\ y_2 &:= \frac{1}{331776}x^9 - \frac{1}{6144}x^7 + \frac{7}{13824}x^6 + \frac{3}{1024}x^5 - \frac{13}{384}x^4 + \frac{1301}{13824}x^3 + \frac{57}{128}x^2 - \frac{205}{96}x + \frac{1855}{648} \\ y_3 &:= \frac{1}{876488338465357824}x^{27} - \frac{1}{5410421842378752}x^{25} + \frac{7}{12173449145352192}x^{24} \\ &+ \frac{1}{75144747810816}x^{23} - \frac{17}{169075682574336}x^{22} - \frac{1021}{3043362286338048}x^{21} + \frac{35}{4696546738176}x^{20} \\ &- \frac{6481}{338151365148672}x^{19} - \frac{293587}{1141260857376768}x^{18} + \frac{12523}{6262062317568}x^{17} + \frac{18847}{42268920643584}x^{16} \\ &- \frac{26979091}{380420285792256}x^{15} + \frac{361405}{1174136684544}x^{14} + \frac{14649095}{21134460321792}x^{13} - \frac{4094795}{371504185344}x^{12} \\ &+ \frac{139379441}{4696546738176}x^{11} + \frac{290251189}{2641807540224}x^{10} - \frac{568499227363}{570630428688384}x^9 + \frac{396363457}{195689447424}x^8 \\ &+ \frac{1163566549}{165112971264}x^7 - \frac{4658795143}{92876046336}x^6 + \frac{463542511}{4586471424}x^5 + \frac{796028191}{10319560704}x^4 - \frac{5927143451}{5804752896}x^3 \\ &+ \frac{59730971}{17915904}x^2 - \frac{1740240205}{322486272}x + \frac{25077227455}{6530347008} \end{aligned}$$

Obrázek 13: Ukázka vypočítaných iterací.



Obrázek 14: Množina  $M$ , bod  $(4, 2)$  a jeho okolí a graf funkce  $y_3$ .

### Obyčejné diferenciální rovnice.

V obyčejných diferenciálních rovnicích prvního řádu se Banachova věta o pevném bodě využívá pro důkaz Picardovy-Lindelöfovy věty o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy. Uvažujme tedy obyčejnou diferenciální rovnici s počáteční podmínkou (Cauchyova úloha)

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (25)$$

kde  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je pevně daná funkce a  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Řešením Cauchyovy úlohy rozumíme funkci  $y \in C^1(I)$ , kde  $I$  je nějaký otevřený interval obsahující  $t_0$ , takovou, že platí:

1.  $(\forall t \in I) : y'(t) = f(t, y(t))$
2.  $y(t_0) = y_0$ .

Existenci a jednoznačnost řešení nám garantuje následující věta.

**Věta 9 (Picardova-Lindelöfova věta o existenci a jednoznačnosti.)** *Bud'*

- $f, \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  spojité na množině

$$D = \left\{ (t, y) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a \wedge |y - y_0| \leq b \right\},$$

kde  $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^+$ ;

- $M = \max_{(t,y) \in D} |f(t, y)|$ ,  $L = \max_{(t,y) \in D} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right|$ ;
- $h \in \mathbb{R}^+$  takové, že  $h \leq a$ ,  $hM \leq b$ ,  $hL < 1$ .

Pak existuje právě jedno řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

na intervalu  $(t_0 - h, t_0 + h)$ . [1]

**Důkaz** Nejprve si uvědomme, že daná Cauchyova úloha je ekvivalentní s integrální rovnicí

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du.$$

Nyní uvažujme metrický prostor  $C(\langle t_0 - h, t_0 + h \rangle)$  s maximovou metrikou

$$\varrho(y_1, y_2) = \max_{t \in \langle t_0 - h, t_0 + h \rangle} |y_1(t) - y_2(t)|$$

a definujme metrický prostor

$$X = \{y \in C(\langle t_0 - h, t_0 + h \rangle) : (\forall t \in \langle t_0 - h, t_0 + h \rangle) : |y(t) - y_0| \leq b\}$$

také s maximovou metrikou. Prostor  $X$  s danou metrikou je úplný metrický prostor, protože je to uzavřená podmnožina úplného metrického prostoru  $C(\langle t_0 - h, t_0 + h \rangle)$ . Definujme si zobrazení

$$T : X \rightarrow C(\langle t_0 - h, t_0 + h \rangle),$$

které má předpis

$$T(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du.$$

Jako první budeme chtít dokázat, že pro každé  $y \in X$  platí  $T(y) \in X$ , tedy chceme, aby platilo

$$|T(y)(t) - y_0| \leq b$$

pro  $\forall t \in \langle t_0 - h, t_0 + h \rangle$ . To dokážeme následujícím výpočtem. Mějme tedy  $y \in X$ . Pak  $\forall t \in \langle t_0 - h, t_0 + h \rangle$  platí

$$|T(y)(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du \right| \leq \left| \int_{t_0}^t \underbrace{|f(u, y(u))|}_{\leq M} du \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^t M du \right| = M \cdot |t - t_0| \leq M \cdot h \leq b,$$

z čehož plyne, že

$$T : X \rightarrow X.$$

Právě jsme dokázali, že zobrazení  $T$  zobrazuje  $X$  do sebe. Nyní nám zbývá dokázat, že zobrazení  $T$  je kontraktivní. To dokážeme následujícím výpočtem.

$$(\forall y_1, y_2 \in X)(\forall t \in \langle t_0 - h, t_0 + h \rangle) :$$

$$\begin{aligned} |T(y_1)(t) - T(y_2)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(u, y_1(u)) - f(u, y_2(u)) du \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(u, y_1(u)) - f(u, y_2(u))| du \right| \stackrel{\text{Lagr.věta}}{=} \\ &= \left| \int_{t_0}^t \left| \frac{\partial f(u, \xi(u))}{\partial y} \cdot (y_1(u) - y_2(u)) \right| du \right| = \\ &= \left| \int_{t_0}^t \underbrace{\left| \frac{\partial f(u, \xi(u))}{\partial y} \right|}_{\leq L} \cdot \underbrace{|y_1(u) - y_2(u)|}_{\leq \varrho(y_1, y_2)} du \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L \cdot \varrho(y_1, y_2) du \right| = L \cdot \varrho(y_1, y_2) \cdot \underbrace{|t - t_0|}_{\leq h} \leq \\ &\leq L \cdot h \cdot \varrho(y_1, y_2), \end{aligned}$$

a proto platí

$$\varrho(T(y_1), T(y_2)) \leq q \varrho(y_1, y_2),$$

kde  $q = h \cdot L < 1$ , tedy zobrazení  $T$  je kontraktivní. Díky tomu, že je zobrazení  $T$  kontraktivní a zobrazuje  $X$  do sebe, tak má právě jeden pevný bod  $y^* \in X$ , který je řešením Cauchyovy úlohy. ■

Banachova věta o pevném bodě nám neposkytuje jenom výpomoc pro dokazování Picardovy-Lindelöfovy věty, ale dává nám i návod k numerickému řešení Cauchyovy úlohy.

**Příklad** Najděte řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Je zřejmé, že  $f(t, y) = y$  a  $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = 1$  jsou spojité na množině  $\mathbb{R}^2$ , tedy  $f$  bude splňovat předpoklady věty 9. Zadanou úlohu nejprve převedeme na integrální rovnici, která má tvar

$$y(t) = 1 + \int_0^t y(u) du.$$

Zobrazení  $T$ , jehož pevný bod hledáme, bude tedy dané předpisem

$$T(y)(t) = 1 + \int_0^t y(u) du.$$

Jako počáteční aproximaci k iterativnímu procesu si zvolíme funkci  $y_0 = 1$ , jelikož splňuje počáteční podmínkou Cauchyovy úlohy. Jednotlivé iterace nám vyšly

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ y_1 &= 1 + \int_0^t 1 du = 1 + t \\ y_2 &= 1 + \int_0^t (1 + u) du = 1 + t + \frac{t^2}{2} \\ y_3 &= 1 + \int_0^t (1 + u + \frac{u^2}{2}) du = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \\ y_4 &= 1 + \int_0^t (1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6}) du = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Jak můžeme vidět, tak z každou iterací se přibližujeme k funkci  $e^t$ , kterou lze zapsat jako

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \dots,$$

tedy řešením Cauchyovy úlohy bude funkce  $y = e^t$  pro  $t \in \mathbb{R}$ .



## 7 Závěr

V této práci jsme si nejprve řekli, co je to pevný bod a ukázali si několik příkladů. Poté jsme si ukázali, že když funkce bude definovaná na omezeném uzavřeném intervalu, bude spojitá a bude interval zobrazovat do sebe, tak bude existovat alespoň jeden pevný bod. Dále jsme si naformulovali větu 2 a dokázali jsme, že funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  splňující předpoklady věty 2 bude mít právě jeden pevný bod. Následně jsme si řekli něco o metrických prostorech a ukázali si příklady úplných a neúplných metrických prostorů. Po formulaci Banachovy věty o pevném bodě jsme úspěšně dokázali, že zobrazení splňující předpoklady Banachovy věty bude mít právě jeden pevný bod. Z důkazu jsme navíc zjistili iterativní postupu, pomocí kterého lze najít tento pevný bod.

V další kapitole jsme se zabývali aplikacemi Banachovy věty. Nejdříve jsme se podívali na numerický výpočet odmocniny. Tam jsme zjistili, že když funkce, jejíž pevný bod je hledaná odmocnina, splňuje předpoklady Banachovy věty, tak můžeme aplikovat iterativní proces, který nám po několika iteracích vrátí téměř přesný výsledek. Dále jsme se zabývali řešením soustavy  $n$  rovnic o  $n$  neznámých. Zde jsme si definovali zobrazení s parametrem, kde se nám povedlo určit tento parametr, aby zobrazení splňovalo předpoklady Banachovy věty. Díky tomu jsme mohli aplikovat iterativní proces, díky kterému se můžeme numericky dopočítat k výsledku. Potom jsme se zabývali implicitními funkcemi, kde jsme pomocí Banachovy věty úspěšně dokázali větu o implicitní funkci. V důkazu jsme zjistili, že Banachova věta nám opět nabídla možnost výpočtu pomocí iterativního procesu, abychom numericky spočítali přibližnou funkci na okolí daného bodu. Nakonec jsme se zabývali obyčejnými diferenciálními rovnicemi, kde jsme pomocí Banachovy věty úspěšně dokázali Picardovu-Lindelöfovou větu o existenci a jednoznačnosti. I zde nám Banachova věta nabídla postup, kterým je možné numericky získat přibližné řešení.

Pokud to shrneme, tak Banachova věta o pevném bodě neslouží pouze k určení, zdali existuje jednoznačné řešení, ale také nám nabízí numerický postup, jak se k tomuto řešení dopracovat.



## Literatura

- [1] BOUCHALA Jiří. *Úvod do funkcionální analýzy* [online]. Ostrava, 2012 [cit. 2017-04-21]. Dostupné z: <http://mi21.vsb.cz/modul/uvod-do-funkcionalni-analyzy>
- [2] POSPÍŠIL Lukáš a VONDRÁK Vít. *Numerické metody 1* [online]. Ostrava, 2011 [cit. 2017-04-21]. Dostupné z: <http://mi21.vsb.cz/modul/numericke-metody-1>
- [3] KRAJC Bohumil a BEREMLIJSKI Petr. *Obyčejné diferenciální rovnice v příkladech* [online]. Ostrava, 2013 [cit. 2017-04-21]. Dostupné z: <http://mi21.vsb.cz/modul/obycejne-diferencialni-rovnice>
- [4] DOSTÁL Zdeněk a VONDRÁK Vít. *Lineární algebra* [online]. Ostrava, 2012 [cit. 2017-04-21]. Dostupné z: <http://mi21.vsb.cz/modul/linearni-algebra>
- [5] KUBEN J., MAYEROVÁ Š., RAČKOVÁ P. a ŠARMANOVÁ P. *Diferenciální počet funkcí více proměnných* [online]. Ostrava, 2012 [cit. 2017-04-21]. Dostupné z: <http://mi21.vsb.cz/modul/diferencialni-pocet-funkci-vice-promennych>
- [6] BOUCHALA Jiří a SADOWSKÁ Marie. *Mathematical analysis 1* [online]. Ostrava, 2007 [cit. 2017-04-21]. Dostupné z: [http://home1.vsb.cz/~bou10/MA\\_1/ma\\_1.html](http://home1.vsb.cz/~bou10/MA_1/ma_1.html)
- [7] BOUCHALA Jiří. *Nelineární funkcionální analýza: Rukopis 7* [online]. [cit. 2017-04-21]. Dostupné z: <http://home1.vsb.cz/~bou10/archiv/NEFN/nefn.html>
- [8] QUARTERONI Alfio, SACCO Riccardo a SALERI Fausto. *Numerical Mathematics*. Druhé, ilustrované vydání. Berlin: Springer, 2007. ISBN 3-540-34658-9.